4. Описание системы материальных точек

4.1. Центр масс системы

Все перечисленные выше параметры движения-покоя относятся к одной материальной точке и описывают лишь абсолютное перемещение с точностью до первого слагаемого. Однако при описании системы материальных точек наряду с абсолютным движением-покоем имеет место относительное движение-покой, и перемещение системы носит противоречивый абсолютно-относительный характер. Поэтому следует ввести абсолютно-относительные параметры движения-покоя, используя в качестве реперной точки центр масс системы.

Центр масс это общая, средняя, коллективная точка движения-покоя системы:

$$\hat{\psi}_c = \frac{\sum m_i \psi_i}{M} \quad \text{где} \quad M = \sum m_i . \tag{2.44}$$

4.2. Вектор конфигурации материальной точки - парциальный вектор системы

Определим вектор абсолютно-относительного положения или конфигурации произвольной материальной точки системы согласно равенству:

$$\hat{\psi}_{si} = \hat{\psi}_{ai} + \hat{\psi}_{vi} = \hat{\psi}_{ii} + (\hat{\psi}_c - \hat{\psi}_i)\,, \tag{2.45}$$

где $\hat{\psi}_{ai}$, $\hat{\psi}_{ii}$, и $\hat{\psi}_i$ - разные обозначения одного и того же абсолютного положения или перемещения точки:

$$\hat{\psi}_{ai} = \hat{\psi}_{ii} = \hat{\psi}_i . \tag{2.46}$$

Второе слагаемое $\hat{\psi}_{vi}$ выражает относительное положение или перемещение точки:

$$\hat{\psi}_{vi} = \hat{\psi}_c - \hat{\psi}_i . \tag{2.47}$$

Сам вектор абсолютно-относительного положения i-ой материальной точки $\hat{\psi}_{si}$ будем называть парциальным вектором системы.

Как следует из определения (2.47), парциальный вектор системы равен вектору конфигурации центра масс:

$$\hat{\psi}_{si} = \hat{\psi}_c . \tag{2.48}$$

Вектор относительной конфигурации i-ой материальной точки выражает ее положения относительно всех материальных точек системы:

$$\hat{\psi}_{vi} = \hat{\psi}_c - \hat{\psi}_i = \sum m_{ik}(\hat{\psi}_i - \hat{\psi}_k)\,/\,m_i = \sum \hat{\psi}_{ik}\,, \tag{2.49}$$

где коэффициенты m_{ik} равны:

$$m_{ik} = \frac{\sum m_i m_k}{M} . \tag{2.50}$$

Эти коэффициенты называем относительными массами.

Составляющие вектора относительной конфигурации

$$\hat{\psi}_{ik} = m_{ik}(\hat{\psi}_i - \hat{\psi}_k)/m_i \tag{2.51}$$

- относительные конфигурации i-той и k-той точек.

4.3. Матрица полной конфигурации

Введенные понятия позволяют абсолютно-относительную конфигурацию системы выразить матрицей конфигурации:

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{11} & \hat{\psi}_{12} & \cdot & \hat{\psi}_{1n} \\ \hat{\psi}_{21} & \hat{\psi}_{22} & \cdot & \hat{\psi}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\psi}_{n1} & \hat{\psi}_{n2} & \cdot & \hat{\psi}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

След матрицы, равный сумме ее диагональных элементов, определяет абсолютную конфигурацию системы:

$$sp\left[\hat{\psi}_{ii}\right] = \sum \hat{\psi}_{ii}. \tag{2.53}$$

Недиагональные элементы матрицы, симметричные относительно диагонали, равные по величине и противоположные по знаку, определяют относительную конфигурацию системы, а строки описывают абсолютно-относительную конфигурацию точек. $\hat{\Psi}$ - матрице соответствуют две более глубокие матрицы:

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{11} & \hat{\phi}_{12} & \cdot & \hat{\phi}_{1n} \\ \hat{\phi}_{21} & \hat{\phi}_{22} & \cdot & \hat{\phi}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\phi}_{n1} & \hat{\phi}_{n2} & \cdot & \hat{\phi}_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \hat{O} = \begin{pmatrix} \hat{o}_{11} & \hat{o}_{12} & \cdot & \hat{o}_{1n} \\ \hat{o}_{21} & \hat{o}_{22} & \cdot & \hat{o}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{o}_{n1} & \hat{o}_{n2} & \cdot & \hat{o}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

4.4. Векторы состояния материальных точек системы

Введем вектор абсолютно-относительного состояния точки:

$$\hat{S}_i = \hat{s}_{ai} + \hat{s}_{vi} = m_i\hat{\psi}_i + \sum m_{ik}(\hat{\psi}_k - \hat{\psi}_i) = m_i\hat{\psi}_i + \sum \hat{s}_{ik}, \tag{2.55}$$

где вектор абсолютного состояния

$$\hat{s}_{ai} = m_i\hat{\psi}_i \tag{2.56}$$

и вектор относительного состояния

$$\hat{s}_{vi} = \sum m_{ik}(\hat{\psi}_k - \hat{\psi}_i) = \sum \hat{s}_{ik}\,. \tag{2.57}$$

Вектор, равный произведению массы произвольной материальной точки системы на вектор положения центра масс системы, называем парциальным вектором абсолютно-относительного состояния системы. Как следует из определения, вектор абсолютно-относительного состояния i-ой материальной точки равен парциальному вектору состояния системы:

$$\hat{s}_i = m_i\hat{\psi}_c\,. \tag{2.58}$$

Сумма всех парциальных состояний системы определяет состояние системы в целом:

$$\hat{S} = \sum \hat{s}_i = \hat{S}_a + \hat{S}_v = \sum m_i\hat{\psi}_i + \sum\sum \hat{s}_{ik} = M\hat{\psi}_c\,. \tag{2.59}$$

4.5. Матрица состояния системы

Состояние системы удобно описывать матрицей ее состояния:

$$\hat{S} = \left\|\hat{s}_{ik}\right\|, \tag{2.60}$$

где $s_{ii} = s_i$ - диагональные элементы абсолютного состояния. След матрицы равен абсолютному состоянию системы S_a, вектор относительного состояния S_v равен нулю. И вектор состояния системы равен ее абсолютному вектору состояния:

$$\hat{S} = \hat{S}_a = M\hat{\psi}_c\,. \tag{2.61}$$

Это естественный результат: система, взятая сама по себе, безотносительна и ее относительное состояние равно нулю.

4.6. Импульсы материальных точек и системы

Производная абсолютно-относительного состояния i-ой материальной точки определяет ее абсолютно-относительный импульс

$$\hat{p}_i = \hat{p}_{ai} + \hat{p}_{vi} = m_i\hat{\upsilon}_i + \sum m_{ik}(\hat{\upsilon}_k - \hat{\upsilon}_i)\,, \tag{2.62}$$

где

$$\hat{p}_{ai} = m_i\hat{\upsilon}_i \tag{2.63}$$

- абсолютный импульс i-ой материальной точки, и

$$\hat{p}_v = \sum m_{ik}(\hat{\upsilon}_k - \hat{\upsilon}_i) = \sum \hat{p}_{ik} \tag{2.64}$$

- относительный импульс i-той материальной точки.
Полный импульс материальной точки равен парциальному импульсу системы:

$$\hat{p}_i = m_i\hat{\upsilon}_c\,. \tag{2.65}$$

Сумма парциальных импульсов системы определяет импульс системы:

$$\hat{P} = \sum \hat{p}_i = \hat{P}_a + \hat{P}_v = \sum m_i \hat{\upsilon}_i + \sum\sum m_{ik} (\hat{\upsilon}_k - \hat{\upsilon}_i) = M\hat{\upsilon}_c . \qquad (2\ 66)$$

Матричная форма импульса системы аналогична вышеприведенным матрицам:

$$\hat{P} = \sum \hat{p}_i = \hat{P} = \|\hat{p}_{ik}\| . \qquad (2.67)$$

4.7 Кинема системы

Производная абсолютно-относительного импульса i-ой материальной точки определяет ее абсолютно-относительную кинему

$$\hat{F}_i = \hat{f}_a + \hat{f}_v = \sum m_i \hat{w}_i + \sum\sum m_{ik} (\hat{w}_k - \hat{w}_i) , \qquad (2.68)$$

равную парциальной кинеме системы:

$$\hat{F}_i = m_i \hat{w}_c . \qquad (2.69)$$

Сумма парциальных кинем системы равна кинеме системы:

$$\hat{F} = \sum \hat{F}_i = M\hat{w}_c . \qquad (2.70)$$

Производная от матрицы импульса системы приводит нас к матрице кинемы

$$\hat{F} = \|f_{ik}\| . \qquad (2.71)$$

4.8. Мобилита системы

Производная абсолютно-относительной кинемы i-ой материальной точки определяет ее абсолютно-относительную мобилиту:

$$\hat{D} = \hat{d}_a + \hat{d}_v = \sum m_i \hat{z}_i + \sum\sum m_{ik} (\hat{z}_k - \hat{z}_i) ; \qquad (2.72)$$

она равна парциальной мобилите системы

$$\hat{D}_i = m_i \hat{z}_c . \qquad (2.73)$$

Сумма парциальных мобилит системы равна мобилите системы:

$$\hat{D} = \sum \hat{D}_i = M\hat{Z}_c , \qquad (2.74)$$

которая также может быть представлена в матричной форме.

4.9. Меры энергий системы

Рассмотрим абсолютно-относительную энергию системы на $\hat{P}$-уровне, определяя ее равенством:

$$\hat{E} = \int_{\upsilon_{c0}}^{\upsilon_c} (\hat{F} d\hat{\psi}_c) = \int_{\upsilon_{c0}}^{\upsilon_c} M \frac{d\hat{\upsilon}_c}{dt} d\hat{\psi}_c + \hat{E}_0 = \int_{\upsilon_{c0}}^{\upsilon_c} M \hat{\upsilon}_c d\hat{\upsilon}_c + \hat{E}_0 = \frac{M\hat{\upsilon}_c^2}{2} = \frac{\hat{P}_c^2}{2M} . \tag{2.75}$$

Выделяя абсолютную и относительную части энергии, получим:

$$\hat{E} = \hat{E}_a + \hat{E}_v = \sum \frac{m_i \hat{\upsilon}_i^2}{2} + \left(-\sum\sum \frac{m_{ik}(\hat{\upsilon}_k - \hat{\upsilon}_i)^2}{2} \right), \tag{2.76}$$

где абсолютная составляющая энергии

$$\hat{E}_a = \sum \frac{m_i \hat{\upsilon}_i^2}{2} , \tag{2.77}$$

и относительная составляющая

$$\hat{E}_v = -\sum\sum \frac{m_{ik}(\hat{\upsilon}_k - \hat{\upsilon}_i)^2}{2} . \tag{2.78}$$

Относительное движение есть отрицание абсолютного движения, поэтому мерой относительной скорости может служить также величина

$$\hat{u}_{ik} = i(\hat{\upsilon}_i - \hat{\upsilon}_k), \tag{2.79}$$

с ней связан относительный импульс

$$\hat{p}_{ik} = i m_{ik} \hat{u}_{ik} = m_{ik}(\hat{\upsilon}_k - \hat{\upsilon}_i) . \tag{2.80}$$

Опираясь на эту форму относительного импульса, перепишем выражение энергии в виде

$$\hat{E} = \sum \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \sum\sum \frac{\hat{p}_{ik}^2}{2m_{ik}} \tag{2.81}$$

или

$$\hat{E} = \sum \hat{e}_{ii} + \sum\sum \hat{e}_{ik} . \tag{2.82}$$

Матричная форма записи абсолютно-относительной энергии имеет вид:

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \hat{e}_{11} & \hat{e}_{12} & . & \hat{e}_{1n} \\ 0 & \hat{e}_{22} & . & \hat{e}_{2n} \\ 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \hat{e}_{nn} \end{pmatrix} . \tag{2.83}$$

Матрица абсолютно-относительной энергии - треугольная, след матрицы определяет абсолютную составляющую энергии, а сумма всех недиагональных элементов равна относительной энергии системы. Полная абсолютно-относительная энергия системы равна сумме всех элементов матрицы или, как мы будем говорить, полному следу матрицы, который обозначаем с заглавной буквы

$$\hat{E} = Sp\left[\hat{e}_{ik}\right]. \tag{2.84}$$

Таким образом, будем различать полный след матрицы и частный или диагональный след.

Аналогично определяются энергии системы других уровней (см.(2.41),(2.75) и (2.76)). В частности, энергия $\hat{S}$-уровня имеет вид:

$$\hat{E} = \sum \frac{\hat{s}_i^2}{2m_i} + \sum\sum \frac{\hat{s}_{ik}^2}{2m_{ik}}. \tag{2.85}$$

Первые производные по времени от энергий системы равны абсолютно-относительным мощностям. В частности на $\hat{P}$ - уровне движения-покоя имеем:

$$\hat{N} = \sum \hat{f}_i \hat{\upsilon}_i + \sum\sum \hat{f}_{ik} \hat{u}_{ik} = \sum \hat{n}_{ii} + \sum\sum \hat{n}_{ik} \tag{2.86}$$

или в матричной форме

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} \hat{n}_{11} & \hat{n}_{12} & . & \hat{n}_{1n} \\ 0 & \hat{n}_{22} & . & \hat{n}_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \hat{n}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.87}$$

В замкнутой системе, возможно взаимное превращение абсолютного и относительного движения, но полное движение при этом сохраняется.

4.10. Центр масс системы в абсолютно-относительном движении

Векторы абсолютно-относительного состояния всех точек системы определяют абсолютно-относительную структуру центра масс системы. Согласно (2.55) вектор абсолютно-относительного состояния i-ой материальной точки имеет вид

$$\hat{S}_i = \hat{s}_{ai} + \hat{s}_{vi} = m_i \hat{\psi}_i + \sum m_{ik} (\hat{\psi}_k - \hat{\psi}_i).$$

Принимая это во внимание, находим центр масс системы в абсолютно-относительном движении:

$$\hat{\Psi}_c = \frac{\sum \hat{S}_i}{M} = \hat{\Psi}_{ca} + \hat{\Psi}_{cv} = \sum \frac{m_i \hat{\psi}_i}{M} + \sum\sum \frac{m_{ik}(\hat{\psi}_k - \hat{\psi}_i)}{M} = \sum \hat{\psi}_{cii} + \sum\sum \hat{\psi}_{cik}. \tag{2.88}$$

Он определяет центр масс покоя, или нахождения (центр утверждения), системы в произвольной точке своей траектории, и центр масс движения, или ненахождения (центр отрицания) в той же точке траектории.

Абсолютная составляющая положения центра масс системы $\hat{\Psi}_{ca}$ отражает его абсолютную потенциально-кинетическую грань покоя-движения, тогда как относительная составляющая $\hat{\Psi}_{cv}$ описывает относительные потенциально-кинетические положения точек системы, поэтому конфигурационная матрица центра масс системы $\left\|\hat{\psi}_{cmn}\right\|$ дает полную информацию о системе.

Сумма диагональных элементов матрицы определяет абсолютное положение центра масс, а недиагональные элементы определяют относительные положения точек и их общая сумма равна нулю, ибо относительные положения любых двух точек противоположны по знаку.